1 4.1 Εφαπτομένες, σημεία ιδιομορφίας, ασύμπτωτες και σημεία καμπής.

Έστω $V(f)$ μια αλγεβρική καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}^2$, όπου $f \in \mathbb{C}[x,y]$ είναι πολυώνυμο βαθμού n, και L μια ευθεία με παραμετρική εξίσωση $x = a + lt, y = b + mt$. Η L διέρχεται από το σημείο $P = (a,b)$ και έχει κλίση $\frac{m}{l}$. Οι τομές της ευθείας και της καμπύλης δίνονται από τις λύσεις του συστήματος $f(x,y) = 0, x = a + lt, y = b + mt$. Ή ισοδύναμα από $f(a + lt, b + mt) = 0, x = a + lt, y = b + mt$.

Το πολυώνυμο $f(a + lt, b + mt)$ γράφεται από τον τύπο του $Taylor$, ως

$$f(a+lt,b+mt) = f(a,b) + (\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)l + (\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)m)t +$$

$$(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)l^2 + 2(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)lm + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)m^2)\frac{t^2}{2!} + \cdots +$$

$$(\frac{\partial^r f}{\partial x^r}(a,b)l^r + \binom{r}{1}(\frac{\partial^r f}{\partial x^{r-1}\partial y}(a,b)l^{r-1}m + \cdots + \binom{r}{r}\frac{\partial^r f}{\partial y^r}(a,b)m^r)\frac{t^r}{r!} + \cdots +$$

$$(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(a,b)l^n + \binom{n}{1}(\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}(a,b)l^{n-1}m + \cdots + \binom{n}{n}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(a,b)m^n)\frac{t^n}{n!}.$$

Το παραπάνω πολυώνυμο ως προς t δεν είναι απαραίτητα βαθμού n. Για κατάλληλα l, m ο συντελεστής του t^n μπορεί να μηδενίζεται.

Ορισμός 4.1.1 Ονομάζουμε πολλαπλότητα τομής της ευθείας L και της καμπύλης $V(f)$ στο σημείο $P = (a,b)$ την πολλαπλότητα της ρίζας $t = 0$ στο πολυώνυμο $f(a+lt, b+mt)$ και την συμβολίζουμε $I_P(f,L)$.

Αν το σημείο P δεν ανήκει στην καμπύλη τότε $f(a,b) \neq 0$ και άρα $I_P(f,L) = 0$.

Αν το σημείο P είναι σημείο της καμπύλης (δηλαδή $f(a,b) = 0$) και μια τουλάχιστον από τις μερικές παραγώγους υπολογισμένες στο σημείο (a,b), δηλαδή $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$,είναι διάφορη του μηδενός, τότε το σημείο P λέγεται **απλό** σημείο της καμπύλης και $I_P(f,L) = 1$ για όλες τις ευθείες εκτός από μια που $I_P(f,L) \geq 2$ (η κλίση της είναι τέτοια ώστε $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)l + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)m = 0$), η ευθεία αυτή λέγεται **εφαπτομένη**.
Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) = 0.$$

Παράδειγμα 4.1.2 Το σημείο $(1,1)$ είναι σημείο της καμπύλης

$$V(f) = V(x^8 - 3x^3y^4 + 7x^2y^{11} - 5y^3),$$

αφού $f(1,1) = 0$. Οι δύο μερικές παράγωγοι είναι $\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^7 - 9x^2y^4 + 14xy^{11}$ και $\frac{\partial f}{\partial y} = -12x^3y^3 + 77x^2y^{10} - 15y^2$. Έχουμε $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 13$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 50$, άρα το σημείο $(1,1)$ είναι απλό σημείο της καμπύλης και η εφαπτομένη στο σημείο αυτό έχει εξίσωση

$$13(x-1) + 50(y-1) = 0.$$

Ορισμός 4.1.3 Ένα σημείο P της καμπύλης $V(f)$ λέγεται σημείο **καμπής** αν

ι) P είναι απλό σημείο της καμπύλης και

ιι) για την εφαπτομένη L ισχύει $I_P(f,L) \geq 3$.

Σημεία καμπής εμφανίζονται σε καμπύλες βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του τρία.

Παράδειγμα 4.1.4 Το σημείο $(0,0)$ είναι σημείο της καμπύλης $V(y-x^3)$ και έχουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$. Άρα το σημείο $(0,0)$ είναι απλό και η εφαπτομένη έχει εξίσωση $0x + 1y = 0$, δηλαδή $y = 0$. Μια παραμετρική μορφή της εφαπτομένης είναι: $x = t$ και $y = 0$ και το πολυώνυμο $f(a+lt, b+mt)$ γίνεται στην περίπτωση αυτή: $0 - t^3 = -t^3$. Η πολλαπλότητα της ρίζας $t = 0$ είναι τρία, δηλαδή $I_P(f,L) = 3$, συνεπώς το σημείο $(0,0)$ είναι σημείο καμπής της καμπύλης $V(y-x^3)$.

Ορισμός 4.1.5 Ένα σημείο P της καμπύλης $V(f)$ λέγεται **ιδιόμορφο** σημείο αν και οι δύο μερικές παράγωγοι είναι μηδέν, δηλαδή $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ και φυσικά $f(a,b) = 0$ επειδή το σημείο $P = (a,b)$ είναι σημείο της καμπύλης.

Για κάθε ευθεία L που διέρχεται από το ιδιόμορφο σημείο P έχουμε $I_P(f,L) \geq 2$.

Ορισμός 4.1.6 Το σημείο P λέγεται **ιδιόμορφο σημείο πολλαπλότητας** k ($k \geq 2$) αν όλες οι μερικές παράγωγοι μέχρι τάξης $k-1$ είναι μηδέν, υπολογισμένες στο σημείο $P = (a,b)$ και μια τουλάχιστον τάξης k είναι διάφορη του μηδενός.
Δηλαδή ένα σημείο P της καμπύλης είναι ιδιόμορφο σημείο πολλαπλότητας 3 αν
$f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = 0$,
και μια τουλάχιστον μερική παράγωγος τάξης 3 υπολογισμένη στο σημείο P είναι διάφορη του μηδενός.

Για ένα ιδιόμορφο σημείο πολλαπλότητας k και μια ευθεία L που διέρχεται από αυτό, ισχύει $I_P(f,L) \geq k$. Η ισότητα ισχύει για όλες σχεδόν τις ευθείες, εκτός απο το πολύ k ευθείες.

Μια ευθεία L λέγεται **εφαπτομένη σε ένα ιδιόμορφο σημείο** P πολλαπλότητας k αν $I_P(f,L) > k$. Συνήθως οι εφαπτόμενες σε ένα ιδιόμορφο σημείο είναι περισσότερες από μία αλλά πάντα λιγότερες από k. Τις εξισώσεις των εφαπτομένων σε ένα ιδιόμορφο σημείο πολλαπλότητας k τις βρίσκουμε από την εξίσωση

$$(\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,b)(x-a)^k + \binom{n}{1}(\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1}\partial y}(a,b)(x-a)^{k-1}(y-b) + \cdots + \binom{k}{k}\frac{\partial^k f}{\partial y^k}(a,b)(y-b)^k) = 0.$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι ομογενής βαθμού k στις μεταβλητές $x-a, y-b$ με συντελεστές μιγαδικούς και άρα αναλύεται σε γινόμενο k γραμμικών ομογενών πολυωνύμων, όχι απαραίτητα διαφορετικών μεταξύ τους. Κάθε ένα από αυτά δίνει την εξίσωση μιας από τις εφαπτομένες στο σημείο $P=(a,b)$ της καμπύλης $V(f)$.

Ένας άλλος τρόπος πιο απλός και πιο ευκολομνημόνευτος είναι ο παρακάτω:
Κάθε πολυώνυμο $f(x,y)$ γράφεται σαν άθροισμα ομογενών πολυωνύμων

$$f(x,y)=F_d(x,y)+...+F_i(x,y)+...+F_n(x,y)$$

όπου $F_i(x,y)$ είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού i και $F_d(x,y)=E(f)$ (όπου $E(f)$ είναι το ομογενές πολυώνυμο που αποτελείται από όλους τους ελαχιστοβάθμιους όρους του f) και $F_n(x,y)=M(f)$, (όπου $M(f)$ είναι το ομογενές πολυώνυμο που αποτελείται από όλους τους μεγιστοβάθμιους όρους του f).

Έστω L μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων με παραμετρική εξίσωση $x=lt$ και $y=mt$. Οι τομές της ευθείας και της καμπύλης δίνονται από τις λύσεις του συστήματος $x=lt, y=mt$ και $f(lt,mt)=0$. Όμως

$$f(lt+mt)=F_d(lt,mt)+...+F_i(lt,mt)+...+F_n(lt,mt)=$$

$$=t^dF_d(l,m)+...+t^iF_i(l,m)+...+t^nF_n(l,m).$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει αν το σημείο $(0,0)$ είναι (ή δεν είναι) ιδιόμορφο σημείο και αν είναι, τί πολλαπλότητας ιδιόμορφο σημείο είναι. Το $I_P(f,L)=d=deg(E(f))$ για το σημείο $P=(0,0)$. Το πολυώνυμο $F_d(x,y)=E(f)$ είναι ομογενές βαθμού d σε δύο μεταβλητές με συντελεστές μιγαδικούς και άρα αναλύεται σε γινόμενο d γραμμικών ομογενών παραγόντων, όχι απαραίτητα διαφορετικών μεταξύ τους. Κάθε γραμμικός παράγοντας του $E(f)$ αντιστοιχεί σε μία εφαπτομένη. Η παραπάνω διαδικασία μας δίνει πληροφορίες μόνο για το σημείο $(0,0)$. Αν το σημείο που μας ενδιαφέρει είναι το σημείο $P=(a,b)$ τότε μπορούμε να αλλάξουμε συντεταγμένες και να μεταφέρουμε το σημείο στο σημείο $(0,0)$: $x=X+a$ και $y=Y+b$ τότε το ελαχιστοβάθμιο πολυώνυμο $f(X+a,Y+b)$ μας δίνει την (τις) εφαπτόμενη (-ες) στο σημείο $(0,0)$ στις νέες συντεταγμένες. Αλλάζοντας συντεταγμένες $X=x-a$ και $Y=y-b$ στις εξισώσεις των εφαπτομένων παίρνουμε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στο σημείο $P(a,b)$.

Παράδειγμα 4.1.7 Στην καμπύλη

$$V(y^2-x^3-x^2)$$

τα ιδιόμορφα σημεία, αν υπάρχουν, δίνονται από τις λύσεις του συστήματος

$$f=y^2-x^3-x^2=0, \frac{\partial f}{\partial x}=-3x^2-2x=0, \frac{\partial f}{\partial y}=2y=0.$$

Η μοναδική κοινή λύση είναι το σημείο $(0,0)$ και άρα η καμπύλη έχει ένα μόνο ιδιόμορφο σημείο, το $(0,0)$. Οι εφαπτομένες στο ιδιόμορφο σημείο δίνονται από το $E(f)=y^2-x^2=(y-x)(y+x)$. Άρα έχουμε δύο εφαπτομένες στο ιδιόμορφο σημείο $(0,0$, τις $y-x=0$ και $y+x=0$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο προβολικό επίπεδο στο σημείο (x_0, y_0, z_0) της καμπύλης $V(F)$ είναι:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)X + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)Y + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)Z = 0.$$

Ένα σημείο (x_0, y_0, z_0) στο προβολικό επίπεδο είναι ιδιόμορφο αν και μόνο αν

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Παράδειγμα 4.1.8 Η καμπύλη

$$V((x^2 - y^2)^2 + (2x^2 - 6y^2)z^2)$$

στο P_C^2 έχει τρία σημεία ιδιομορφίας τα $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$ και $(0, 0, 1)$. Θα βρούμε τις εφαπτομένες στο σημείο $(1, 1, 0)$. Αποομογενοποιούμε θέτοντας $x = 1$. Το σημείο γίνεται το $(1, 0)$ και η εξίσωση $(1 - y^2)^2 + (2 - 6y^2)z^2 = 0$ στο y, z επίπεδο. Αλλάζουμε συντεταγμένες ώστε το σημείο $(1, 0)$ να μετασχηματιστεί στην αρχή των αξόνων θέτοντας $Y = y - 1, Z = z$. Η καμπύλη στις νέες συντεταγμένες έχει εξίσωση $(1-(Y+1)^2)^2+(2-6(Y+1)^2)Z^2 = 0$ και ο ελαχιστοβάθμιος όρος της είναι $4(Y^2-Z^2)$. Άρα οι εφαπτομένες στο $(0, 0)$ είναι οι $Y + Z = 0$ και $Y - Z = 0$. Άρα οι εφαπτόμενες της $V((1 - y^2)^2 + (2 - 6y^2)z^2)$ στο $(1, 0)$ είναι $y - 1 + z = 0$ και $y - 1 - z = 0$. Ομογενοποιούμε ως προς x και έχουμε τις εφαπτόμενες στο σημείο $(1, 1, 0)$: τις $y - x + z = 0$ και $y - x - z = 0$.

4.2 Ασύμπτωτες

Έστω $V(f)$ καμπύλη στο επίπεδο και $V(F)$ η αντίστοιχή της στο προβολικό επίπεδο. Ορίζουμε σαν **ασύμπτωτη** της $V(f)$ οποιαδήποτε ευθεία του επιπέδου που η αντίστοιχή της στο προβολικό επίπεδο είναι εφαπτομένη στην $V(F)$ σε σημείο της στο άπειρο.

Για να βρούμε τις ασύμπτωτες μιας καμπύλης $V(f)$ ομογενοποιούμε την f και παίρνουμε την F. Λύνουμε το σύστημα $F = 0, Z = 0$ και βρίσκουμε τα σημεία στο άπειρο. Αν τα σημεία είναι απλά χρησιμοποιούμε την εξίσωση

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)X + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)Y + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)Z = 0$$

για να βρούμε την εφαπτομένη στο απλό σημείο στο άπειρο. Τέλος αποομογενοποιούμε την παραπάνω εξίσωση βάζοντας $Z = 1$ και έχουμε την εξίσωση της ασύμπτωτης.

Αν κάποιο σημείο στο άπειρο είναι ιδιόμορφο τότε κάνουμε κατάλληλη αποομογενοποίηση και αλλαγή συντεταγμένων ώστε το σημείο να έχει συντεταγμένες $(0, 0)$. Ο ελαχιστοβάθμιος όρος του νέου πολυωνύμου μας δίνει τις εφαπτόμενες στο $(0, 0)$. Μετασχηματίζοντας στις αρχικές συντεταγμένες τις εξισώσεις και βάζοντας $Z = 1$, έχουμε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων.

Παράδειγμα 4.2.1 Η υπερβολή

$$V(x^2 - y^2 - x - 1)$$

έχει δύο σημεία στο άπειρο τα $(1, 1, 0)$ και $(1, -1, 0)$. Και τα δύο είναι απλά σημεία της προβολικής καμπύλης $V(X^2 - Y^2 - XZ - Z^2)$. Οι εφαπτόμενες στα σημεία στο άπειρο είναι $2X - 2Y - Z = 0$ και $2X + 2Y - Z = 0$. Αποομογενοποιούμε βάζοντας $Z = 1$ και έχουμε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων $2x - 2y - 1 = 0$ και $2x + 2y - 1 = 0$.

4.3 Σημεία καμπής.

Ένα σημείο P μιας καμπύλης $V(F)$ λέγεται **σημείο καμπής** αν το σημείο P είναι απλό σημείο της καμπύλης και για την εφαπτομένη ευθεία L στην καμπύλη στο σημείο P ισχύει $I(F, L; P) \geq 3$.

Ορισμός 4.3.1 Έστω F ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού $d \geq 1$. Η *Hessian* του F είναι η ορίζουσα

$$H_F = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

Το H_F είναι ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού $3(d-2)$, αν $d \geq 2$, επειδή κάθε μια από τις παραπάνω δεύτερες μερικές παραγώγους είναι βαθμού $d - 2$. Αν $d = 1$ τότε $H_F = 0$.

Θεώρημα 4.3.2 Ένα σημείο $P = (x_0, y_0, z_0)$ μιας καμπύλης $V(F)$ είναι σημείο καμπής αν και μόνο αν το σημείο P είναι απλό σημείο της καμπύλης και $H_F(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Παράδειγμα 4.3.3 Έστω $F = X^3 + Y^3 - 3XYZ$ τότε $\frac{\partial F}{\partial X} = 3X^2 - 3YZ$, $\frac{\partial F}{\partial Y} = 3Y^2 - 3XZ$, $\frac{\partial F}{\partial Z} = -3XY$. Η καμπύλη $V(F)$ έχει μόνο ένα ιδιόμορφο σημείο, το σημείο $(0, 0, 1)$ (Το κοινό μηδενικό των τριών μερικών παραγώγων). Η *Hessian* της F είναι η

$$H_F = \begin{vmatrix} 6X & -3Z & -3Y \\ -3Z & 6Y & -3X \\ -3Y & -3X & 6Z \end{vmatrix} = -54(XYZ + X^3 + Y^3).$$

Τα σημεία καμπής είναι τα κοινά σημεία των δύο καμπυλών $V(F)$ και $V(H_F)$, που δεν είναι ιδιόμορφα σημεία της $V(F)$. Για να βρούμε τα κοινά σημεία, λύνουμε το σύστημα $F = 0$ και $H_F = 0$. Δηλαδή $X^3 + Y^3 - 3XYZ = 0$ και $-54(XYZ + X^3 + Y^3) = 0$. Δηλαδή $X^3 + Y^3 - 3XYZ = 0$ και $XYZ = 0$. Από τη λύση του συστήματος παίρνουμε τα κοινά σημεία $(0, 0, 1), (-1, 1, 0), (-\omega, 1, 0), (-\omega^2, 1, 0)$, όπου ω είναι μια αρχική κυβική ρίζα της μονάδας ($\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ή $\omega = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$). Άρα τα σημεία καμπής είναι τα προηγούμενα σημεία που δεν είναι ιδιόμορφα της $V(F)$. Συνεπώς η καμπύλη έχει τρία σημεία καμπής τα $(-1, 1, 0), (-\omega, 1, 0), (-\omega^2, 1, 0)$. Και τα τρία ανήκουν στην ίδια ευθεία, την $Z = 0$.

Παράδειγμα 4.3.4 Έστω $V(F) = X^3 + Y^3 - Z^3$ η κυβική του $Fermat$ τότε $\frac{\partial F}{\partial X} = 3X^2$, $\frac{\partial F}{\partial Y} = 3Y^2$, $\frac{\partial F}{\partial Z} = -3Z^2$. Η καμπύλη $V(F)$ δεν έχει ιδιόμορφο σημείο (Το κοινό μηδενικό των τριών μερικών παραγώγων είναι το $(0,0,0)$ που δεν αντιστοιχεί σε σημείο του προβολικού επιπέδου). Η $Hessian$ της F είναι η

$$H_F = \begin{vmatrix} 6X & 0 & 0 \\ 0 & 6Y & 0 \\ 0 & 0 & 6Z \end{vmatrix} = -6^3XYZ.$$

Τα σημεία καμπής είναι όλα τα κοινά σημεία των δύο κυβικών καμπύλων $V(F)$ και $V(H_F)$, επειδή η $V(F)$ δεν έχει ιδιόμορφα. Τα 9 σημεία καμπής είναι τα $(0,1,1), (0,\omega,1), (0,\omega^2,1), (1,0,1), (\omega,0,1), (\omega^2,0,1), (1,1,0), (\omega,-1,0), (\omega^2,-1,0)$, όπου ω είναι μια αρχική κυβική ρίζα της μονάδας. Παρατηρούμε ότι κάθε ευθεία που διέρχεται από δύο από τα παραπάνω σημεία καμπής, διέρχεται και από ένα ακόμη από αυτά τα σημεία. Ανήκουν, δηλαδή, ανά τρία σημεία στην ίδια ευθεία. Έχουμε δώδεκα τέτοιες ευθείες συνολικά.

Παρατήρηση 4.3.5 Κάθε λεία καμπύλη βαθμού μεγαλύτερου του 2, στο προβολικό μιγαδικό επίπεδο, έχει πάντα σημεία καμπής . Μια λεία κυβική καμπύλη έχει 9 σημεία καμπής, ενώ μια ιδιόμορφη ανάγωγη κυβική καμπύλη έχει 3 σημεία καμπής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Βρείτε όλα τα $s \in R$ για τα οποία η καμπύλη

$$V(s(x^2 + y^2 - 1) + xy)$$

δεν είναι ανάγωγη. Για κάθε τέτοιο s βρείτε τις δύο ανάγωγες συνιστώσες.

2. Βρείτε όλα τα ιδιόμορφα σημεία της καμπύλης

$$V((x^2 - z^2)^2 - y^2z(2y + 3z)) \subset P^2_{\mathbb{C}}.$$

3. Βρείτε όλα τα ιδιόμορφα σημεία της καμπύλης

$$V(x^6 - x^2y^3z - y^5z) \subset P^2_{\mathbb{C}}$$

και βρείτε όλες τις εφαπτομένες σε κάθε ένα από αυτά.

4. Βρείτε τις ασύμπτωτες της καμπύλης

$$V(x^2 + y^2 - 4x^2y^2).$$

5. Δείξτε ότι σε κάθε κύκλο

$$V((x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2)$$

οι ασύμπτωτες (έχουν μιγαδικούς συντελεστές) διέρχονται από το κέντρο του.

6. Βρείτε τα ιδιόμορφα σημεία της καμπύλης

$$V(y^2z^2 - x^2z^2 + x^4)$$

στο προβολικό μιγαδικό επίπεδο.

7. Βρείτε τα ιδιόμορφα σημεία της καμπύλης

$$V(x^2y^2 + 36x + 24y + 108)$$

στο $\mathbb{R}^2$.

8. Βρείτε τα ιδιόμορφα σημεία της καμπύλης

$$V(y^2 - (5 - x^2)(4x^4 - 20x^2 + 25))$$

στο $\mathbb{R}^2$.

9. Βρείτε τα ιδιόμορφα σημεία της καμπύλης

$$V((1 - x^2 - y^2)^3 - 27x^2y^2)$$

στο $\mathbb{C}^2$.

10. Βρείτε τις ασύμπτωτες της καμπύλης

$$V(x^3 - xy^2 - y).$$

11. Βρείτε τις ασύμπτωτες της καμπύλης

$$V(x^4 - x^2y^2 + y^2).$$